omega al cubo

Juan Sebastián Lach

#bigness

Hacia la década de 1880, Georg Cantor demostró que hay una infinidad de tamaños de infinitos. Existen dos tipos de números para cuantificar infinitos: cardinales y ordinales. Los primeros cuentan cuántos elementos tiene un conjunto mientras que los segundos representan la estructura de un conjunto bien ordenado — un conjunto ordenado linealmente donde cada subconjunto tiene un menor elemento. Los ordinales comienzan así:

0 = {}
1 = {0}
2 = {0,1}
3 = {0,1,2}
…

Cada ordinal es una abreviación para el conjunto bien ordenado de ordinales menores que él mismo. Después de los ordinales finitos, el primer ordinal infinito es:

ω = {0,1,2,3,…}

luego viene:

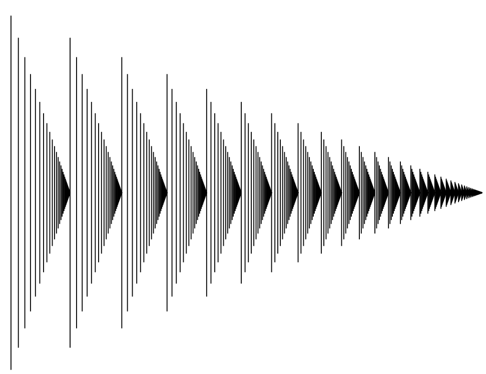
ω+1 = {0,1,2,3,…,ω}

etcétera. Nótese que ω y ω+1 tienen el mismo número de elementos, por lo que se corresponden al mismo número cardinal, pero describen conjuntos bien ordenados diferentes, ya que ω+1 tiene un elemento que es mayor al resto, mientras que ω no tiene un elemento que sea mayor a todos los demás.

Después de ω+1, ω+2, ω+3, etc., viene

2ω = {0,1,2,3,…,ω,ω+1,ω+2,ω+3,…}

que es como tener un libro con una infinidad de páginas y, sentado junto a él, un segundo libro con una infinidad de páginas. Después sigue 3ω y 4ω, etc,…y luego ω al cuadrado, como lo visualiza este dibujo:



Si imaginamos una biblioteca llena de libros, cada uno con una infinidad de páginas, y suponemos que la biblioteca tiene una infinidad de libros (libro 1, libro 2, libro 3, etc.), entonces las páginas formarían un conjunto bien ordenado descrito por el ordinal ω al cuadrado.

Este es solo el comienzo de una larga historia…la historia más larga de todas, pero ¿de qué manera difiere ω^2 de ω? Ninguno tiene un elemento último. Viendo la ilustración de ω^2, podemos ver que son ω copias de ω, una después de la otra.

Esto se escribe como:

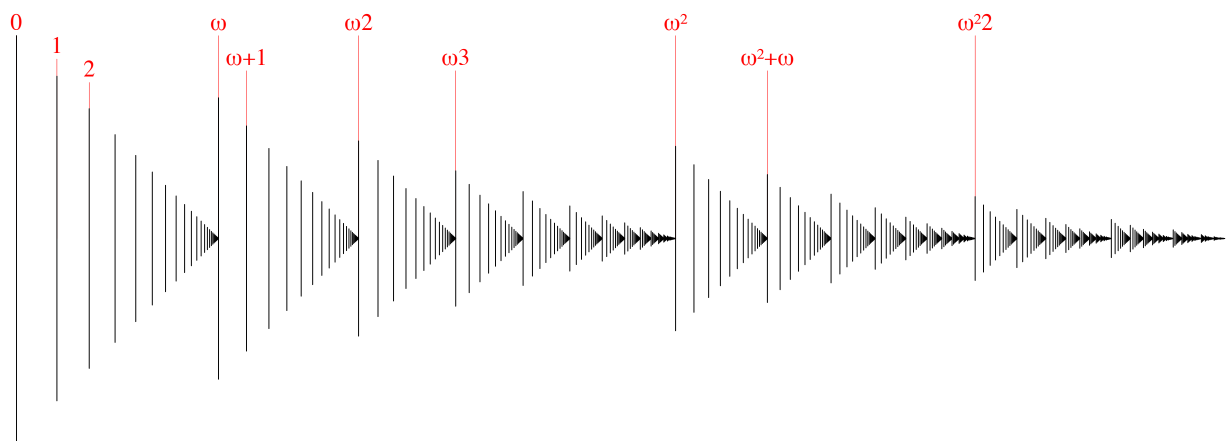
$\omega^2 = \{0,1,2,3,\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2,\omega+3,\ldots,2\omega,2\omega+1,2\omega+2,2\omega+3,\ldots\ldots\}$

Algunos de estos ordinales son **sucesores**: vienen después de un ordinal. Por ejemplo, $2\omega+2$ es un sucesor. Pero algunos ordinales no son sucesores: 0, ω, 2ω, 3ω,…. Exceptuando al 0, todos los otros son ordinales **límite**: tienen aglomerados un bonche de ordinales menores a su izquierda, algo muy diferente de:

$\omega = \{0,1,2,3,\ldots\}$

donde cada elemento, excepto el cero, es un sucesor.

Pero, ¿donde yace la diferencia entre ω^2 y ω^3? Con la visualización de ω^3:



es fácil ver que ω^3 es diferente de ω^2: son ω copias del dibujo de ω^2, puestas una después de la otra. No solo tiene una infinidad de lugares donde se aglomeran las *líneas* — también tiene una infinidad de lugares donde esos *lugares* se aglomeran. Cada línea grande no es aquí nada más un ordinal límite, es un *límite de ordinales límite*. ω^2 tiene infinitos ordinales límite por debajo. Pero ω^3 tiene por debajo infinitos *límites de ordinales límite*.

¿Y en qué se diferencia ω^4 de ω^3? ω^4 tiene muchos ordinales que son *límites de límites de ordinales límite*, etc., con lo que podemos extender esta secuencia para siempre hasta llegar a ω^ω, e incluso más lejos, hasta omega elevado a la omega elevado a la omega y así sucesivamente.

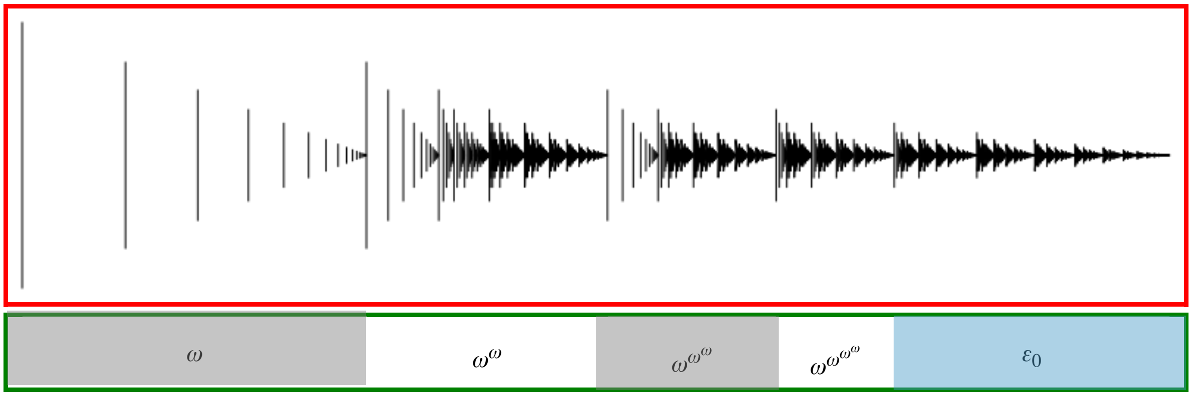
Los ordinales son conjuntos bien ordenados, por lo que capturan el proceso de contar, siempre uno a la vez y sin fin. Dado un ordinal, siempre es posible obtener un ordinal mayor. De hecho es posible dar el *menor* de los ordinales más grande que los anteriores. Por lo tanto, enlistando todos los ordinales ya definidos, es posible obtener uno nuevo: el menor ordinal mayor a los anteriores. Aquí es donde entra en acción el ordinal epsilon cero:

$\varepsilon_0 = \omega\hat{}\ldots$

Este no es un ordinal contable, como los que hemos visto, es decir, tomando ω y elevándolo a potencias. ω^2 es mucho mayor que 2 y ω^3 mucho mayor que 3, por lo que pareciera que esta secuencia de exponentes es una buena manera de nombrar ordinales grandes. Sin embargo, la estrategia termina por fracasar. El mapa $x \mapsto \omega^x$ crece a tal grado que eventualmente se llega a un ordinal x que es tan grande que el mapa termina siendo:

$\omega^x = x$

Es decir, x es un **punto fijo** de la función ω^x, un número tan grande que omega elevado a la potencia de ese número da como resultado *ese mismo número.* No es alcanzable desde 0 a través de una serie finita de aplicaciones del mapa exponencial y de operaciones como la suma y multiplicación. Este número es el supremo de la serie de omegas elevadas a omegas hasta el infinito.



Debido a que ε_0 es incontable y funciona como modelo mínimo para pensar el continuo matemático, me pareció interesante componer una pieza en la cual la estructura interna del continuo pueda ser entendida como una serie de sonidos mínimos y discontinuos.

La pieza está basada en estructuras que encajan entre sí a manera de membresías arregladas en jerárquicas acumulativas, con nuevas series que repiten como 'material' estructuras anteriores. Sin embargo, por el hecho de que esto debe ser perceptible y que ocurre en el tiempo, hay pasajes que rompen con los ciclos anteriories para abrir nuevos inicios a partir de umbrales perceptuales. Estos límites se corresponden con los llamados ordinales *singulares*, en contraparte a los ordinales *regulares* (aquellos que no pueden dividirse en colecciones más pequeñas de partes más pequeñas).

Estas ideas resultarán en una serie de piezas con duración potencialmente infinita. La versión que se está escuchando ahora es un canon cuádruple sobre conjuntos modelados en omega al cubo a varios niveles de escala. Esto sugiere el camino a seguir para hacer múltiples cánones entre distintos ordinales, implicando múltiples canales de audio. Implicará tanto piezas en formato fijo, como es el vaso de la pieza actual, hasta versiones en software donde se pueda generar y visualizar estos conjuntos de manera interactiva.

Referencias

John Baez, https://plus.google.com/s/ordinals%20%23bigness

David Madore, http://www.madore.org/~david/weblog/d.2011-10-02.1946.html#d.2011-10-02.1946

Visualizador de ordinales transfinitos: http://www.madore.org/~david/math/drawordinals.html#?v=e&i=0&l=

Thomas Forster, 2010, *A Tutorial on Countable Ordinals*, https://www.dpmms.cam.ac.uk/~tf/fundamentalsequence.pdf

Gabriel Lehéricy, 2015, *Ordinal Numbers*, www.math.uni-konstanz.de/~lehericy/Ordinals.pdf

Alain Badiou, 2008 [1990], *Number and Numbers,* Polity.